Доклады Академии наук СССР
1956. Том 109, № 2

МАТЕМАТИКА

В. К. КОРОБКОВ

РЕАЛИЗАЦИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КЛАССЕ *П*-СХЕМ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 13 III 1956)

Одной из основных задач в теории схем является реализация функций алгебры логики посредством контактных схем, содержащих минимальное число контактов. В случае контактных *П*-схем (1) эта задача эквивалентна задаче о выражении функции через базисные функции — конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание — посредством формул, в которых знак отрицания встречается только над знаками элементарных переменных. В силу последнего замечания при изучении *П*-схем достаточно ограничиться рассмотрением представления функций алгебры логики в виде формул указанного типа.

Известно, что любая функция алгебры логики, зависящая от n переменных, записывается в виде формулы, построенной посредством операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания и содержащей не более $3\cdot 2^{n-1}-2$ знаков переменных. Известно также (2), что большинство функций, зависящих от n переменных, требует для своей записи в виде формул того же типа не менее чем $\frac{2^n}{\log_2 n}(1-\varepsilon)$ (при $n > N(\varepsilon)$) знаков переменных. Таким образом, большинство функций, зависящих от n переменных, записываются посредством операций $\&$, $\vee$ и $^-$ громоздкими формулами. В то же время практический интерес представляют лишь функции, допускающие простое представление в классе формул некоторого вида, в частности, формул, построенных посредством операций $\&$, $\vee$ и $^-$. При изучении функций, имеющих простую запись в виде формулы определенного вида, естественно пытаться сужать класс рассматриваемых функций. Такими классами являются, например, класс линейных функций, класс симметрических функций и др.

В настоящей заметке исследуется класс симметрических функций*. Следует отметить, что и в этом случае задача о выражении функции через некоторые базисные функции с минимальным числом знаков переменных представляет известные трудности и приходится довольствоваться решением, в некотором смысле близким к минимальному. Здесь дается метод построения формул для симметрических функций с использованием операций $\&$, $\vee$ и $^-$ и показывается, что каждая симметрическая функция, зависящая от n переменных, может быть записана посредством формулы данного вида с числом знаков переменных порядка $c\cdot\log_2 n\cdot n^{1/2\log_2 n+1/2}$

Определение. Симметрической функцией алгебры логики называется функция вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n=k_i \\ (i=1,\,2,\ldots,\,r)}} x_1^{\sigma_1}\&x_2^{\sigma_2}\&\ldots\&x_n^{\sigma_n};$$

где

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i \text{ при } \sigma_i = 1, \\ \bar{x}_i \text{ при } \sigma_i = 0; \end{cases} \quad 0 \leqslant k_i \leqslant n; \quad 0 \leqslant r \leqslant n+1.$$

* О реализации линейных функций в классе *П*-схем см. (3).

Числа k_i называются рабочими числами. Симметрическая функция называется элементарной, если она имеет одно рабочее число ($r = 1$).

Для облегчения дальнейших выкладок введем обозначения: f_n^k — элементарная симметрическая функция, где n — число переменных, а k — рабочее число; S_n^k — количество знаков переменных в записи функции f_n^k, предлагаемой в данной заметке.

Суть метода заключается в построении рекуррентной формулы, которая связывает функцию из данного класса, зависящую от n переменных, с функциями из того же класса (компонентами) от меньшего числа переменных, где на рост числа компонент наложено некоторое ограничение.

Рассмотрим сначала элементарные симметрические функции.

Теорема 1. *Любую элементарную симметрическую функцию можно, используя операции* $\&, \vee, \bar{}$, *записать формулой, содержащей не более, чем* $c_1 \cdot 2^{([\log_2 n]^2+[\log_2 n])/2}$ * *знаков переменных.*

Доказательство. В случае элементарных симметрических функций используем очевидное соотношение

$$f_n^k = \bigvee_{i=0}^{k} \left(f^i_{\left[\frac{n}{2}\right]} \& f^{k-i}_{n-\left[\frac{n}{2}\right]} \right), \quad \text{если } k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]; \tag{1}$$

$$f_n^k = \bigvee_{i=k+\left[\frac{n}{2}\right]-n}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(f^i_{\left[\frac{n}{2}\right]} \& f^{k-i}_{n-\left[\frac{n}{2}\right]} \right), \quad \text{если } k > \left[\frac{n}{2}\right], \tag{1a}$$

где $f^i_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ — функция от первых $\left[\frac{n}{2}\right]$ переменных; $f^{k-i}_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}$ — функция от остальных переменных. Случай $k > \left[\frac{n}{2}\right]$ легко приводится к первому, если заметить, что

$$f_n^k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f_n^{n-k}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n). \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) имеем:

$$S_n^k = S_n^{n-k}, \tag{3}$$

а при $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$:

$$S_n^k = \sum_{i=0}^{k} \left(S^i_{\left[\frac{n}{2}\right]} + S^{k-i}_{n-\left[\frac{n}{2}\right]} \right) \tag{4}$$

или

$$S_n^k = S_n^{k-1} + S^k_{\left[\frac{n}{2}\right]} + S^k_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}. \tag{5}$$

Из последнего следует, что при $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ имеем $S_n^k > S_n^{k-1}$, так как $S^k_{\left[\frac{n}{2}\right]} > 0$, $S^k_{n-\left[\frac{n}{2}\right]} > 0$. Учитывая (3), получаем, что самая худшая запись при этом методе (по числу знаков переменных) будет у функции с рабочим числом $k = \left[\frac{n}{2}\right]$. Если мы оценим число переменных в формуле

---

* Ниже для c_1 будет получена оценка $c_1 < 18{,}75$.

этой функции, то получим оценку сверху для любой элементарной симметрической функции. Сначала оценку будем искать для последовательности n, представляющих степени 2: 1, 2, 4, 8, 16,... Итак, имеем: $n = 2^m$, $k = 2^{m-1}$, $S_{2^m}^{2^{m-1}} = 2S_{2^m+1}^0 + 2S_{2^m-1}^1 + \ldots + 2S_{2^m-1}^{2^{m-1}}$. Используя (3), получим $S_{2^m}^{2^{m-1}} = 4S_{2^m-1}^0 + 2S_{2^m-1}^1 + \ldots + 2S_{2^m-1}^{2^{m-1}-1} = \ldots = 4S_{2^m-1}^0 + \ldots + 4S_{2^m-1}^{2^{m-2}-1} + 2S_{2^m-1}^{2^{m-2}}$. Теперь воспользуемся равенством (5): $S_{2^m}^{2^{m-1}} = 4S_{2^m-1}^0 + \ldots + 4S_{2^m-1}^{2^{m-2}-2} + 6S_{2^m-1}^{2^{m-2}-1} + 4S_{2^m-2}^{2^{m-2}} = 4S_{2^m-1}^0 + \ldots + 4S_{2^m-1}^{2^{m-2}-3} + 10S_{2^m-1}^{2^{m-2}-2} + 12S_{2^m-2}^{2^{m-2}-1} + 4S_{2^m-2}^{2^{m-2}} = \ldots = 4\sum_{i=0}^{2^{m-2}} (2i+1) S_{2^m-2}^{2^{m-2}-i}$. На основании (3) имеем

$$S_{2^m}^{2^{m-1}} = 2\left(S_{2^m-1}^{2^{m-2}} + 2\sum_{i=0}^{2^{m-2}-1} S_{2^m-1}^i\right) = 2(2^{m-1}+2)\left(S_{2^m-2}^{2^{m-3}} + 2\sum_{i=0}^{2^{m-3}-1} S_{2^m-2}^i\right) = \ldots$$

$$\ldots = 2(2^{m-1}+2)(2^{m-2}+2)\ldots(2^3+2)(S_4^2 + 2S_4^0 + 2S_4^1). \qquad (6)$$

Учитывая, что $S_4^0 = 4$; $S_4^1 = 12$; $S_4^2 = 16$ и что $2(2^{m-1}+2)\ldots(2^3+2) = 2^{\frac{m^2-m-4}{2}} \prod_{j=2}^{m-2}\left(1+\frac{1}{2^j}\right) < 1{,}5625 \cdot 2^{\frac{m^2-m-4}{2}}$ *, получаем $S_{2^m}^{2^{m-1}} < 18{,}75 \cdot 2^{\frac{m^2-m}{2}}$. Легко видеть, что при $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ $S_{n+1}^k > S_n^k$. Поэтому, если $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, то $S_n^k < 18{,}75 \cdot 2^{\frac{[\log_2 n]^2 + [\log_2 n]}{2}}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Теорема доказана.

Замечание. Можно получить и точную оценку для элементарной симметрической функции с любым рабочим числом k для последовательности n, являющихся степенями 2. Очевидно, что $S_{2^m}^0 = 2^m$, тогда $S_{2^m}^1 = S_{2^m}^0 + 2S_{2^m-1}^1 = 2^m + 2(S_{2^m-1}^0 + 2S_{2^m-2}^1) = 2 \cdot 2^m + 4S_{2^m-2}^1 = \ldots = 2^m(m+1)$. Продолжая этот процесс дальше, получим $S_{2^m}^2 = 2^m(C_{m+2}^2 - 2)$; $S_{2^m}^3 = 2^m(C_{m+3}^3 - 2m - 3)$; $S_{2^m}^4 = 2^m(C_{m+4}^4 - m^2 - 4m - 2)$. Вообще можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов и найти $S_{2^m}^k$ в виде произведения 2^m на многочлен k-й степени от m, но получение оценок таким методом представляет большие трудности.

Используя результаты, полученные для элементарных симметрических функций, перейдем теперь к рассмотрению неэлементарных функций.

Теорема 2. *Любую симметрическую функцию можно, используя операции* &, $\vee$, $^-$, *записать формулой, содержащей не более чем* $c_2 \cdot [\log_2 n] \cdot 2^{([\log_2 n]^2 + [\log_2 n])/2}$ *знаков переменных.*

Доказательство. В этом случае рекуррентное соотношение устанавливается следующим образом: функцию записываем как дизъюнкцию элементарных функций

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{r} f_n^{k_i};$$

---

* $\prod_{j=2}^{m-2}\left(1+\frac{1}{2^j}\right) < \exp\left[\sum_{j=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^j}\right)\right] = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^{nj}}\right] <$

$$< \exp\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n4^n}\right] = \exp\left[2\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)\right] = 1{,}5625.$$

для элементарных симметрических функций воспользуемся рекуррентными соотношениями (1) и (1а), а затем объединим одинаковые функции от первых $\left[\frac{n}{2}\right]$ переменных. Тогда получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(f^i_{\left[\frac{n}{2}\right]} \& g_i \left(x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \ldots, x_n \right) \right), \qquad (7)$$

где g_i — некоторая симметрическая функция.

Оценку снова будем проводить для самого худшего случая. Снова берем последовательность $n = 1, 2, 4, \ldots 2^m, \ldots$. Обозначим через $S^*_{2^m}$ число знаков переменных для самой плохой (по числу знаков переменных) неэлементарной функции, тогда из (7) следует *: $S^*_{2^m} \leqslant \sum_{i=0}^{2^{m-1}} S^i_{2^{m-1}} + (2^{m-1} + 1) S^*_{2^{m-1}} = \frac{1}{2} S^{2^{m-1}}_{2^m} + (2^{m-1} + 1) S^*_{2^{m-1}} \leqslant \frac{1}{2} S^{2^{m-1}}_{2^m} + \frac{1}{2}(2^{m-1} + 1) S^{2^{m-2}}_{2^{m-1}} + (2^{m-1} + 1)(2^{m-2} + 1) S^*_{2^{m-2}}$. Продолжая этот процесс и используя для оценки $S^{2^{m-1}}_{2^m}$ равенство (6), получим $S^*_{2^m} < (9{,}375\, m - 4{,}4375) \cdot 2^{\frac{m^2-m}{2}}$, а для любого n: $S^*_n < (9{,}375\, [\log_2 n] - 3{,}4375) \cdot 2^{([\log_2 n]^2 + [\log_2 n])/2}$. Этим теорема доказана.

В заключение приведем таблицу S^k_n для первых n.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1							
2	2	4	2						
3	3	8	8	3					
4	4	12	16	12	4				
5	5	17	27	27	17	5			
6	6	22	38	44	38	22	6		
7	7	27	51	66	66	51	27	7	
8	8	32	64	88	96	88	64	32	8

Поступило
10 III 1956

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Гаврилов, Теория релейно-контактных схем, М.—Л., 1950. [2] J. Riordan, C. E. Shannon, J. Math. Phys., 21, 2, 83 (1942). [3] С. В. Яблонский, ДАН, 94, № 5, 805 (1954).

* Число элементарных симметрических функций от 2^{m-1} переменных равно $2^{m-1} + 1$.